TD – Equations différentielles linéaires

0 Rappels de cours

0.1 Différents types d'équations différentielles

- Du premier ordre homogène

$$a(x)y' + b(x)y = 0$$

- Du premier ordre non-homogène

$$a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

- Du second ordre homogène

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

- Du second ordre non-homogène

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$$

0.2 Equations différentielles à variable séparées

Considérons l'équation différentielle :

$$y'(x)f(y) = g(x)$$

Soit F et G deux primitives de f et g

On a alors :

$$F(y) = G(x) + C$$

0.3 Equation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Equation caractéristique du type :

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (D)$$

Si $\Delta > 0 : y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$ avec λ_1 et λ_2 racines de (D) et $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Si $\Delta < 0 : y = (C_1 + C_2x)e^{\lambda x}$

Si $\Delta = 0 : \lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha\text{-}i\beta$ et $y = e^{\alpha}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

0.4 Equation différentielle linéaire d'ordre 2 non-homogène à coefficients constants

$$ay'' + by' + cy = d(x) \quad (E)$$

L'équation homogène associée est :

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (H)$$

$$\text{Solution générale de } (E) = \text{Solution générale de } (H) + \text{Solution particulière de } (E)$$

1 Equations linéaires homogènes du 1er ordre

1.1 (a) $\begin{cases} y' + 4y = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$

On écrit

$$y' = -4y$$
$$\frac{y'}{y} = -4 \ \ (\text{si } y \neq 0)$$

On est à variables séparées

$$\Rightarrow \ln|y| = -4x + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow y = \lambda e^{-4x}, \ \ \lambda = a^C$$

Si $g(0) = 2, \ \ \lambda e^{-4\times 0} = 2 \Leftrightarrow \lambda = 2$

La solution est :

$$y(x) = 2e^{-4x}, \ \ x \in \mathbb{R}$$

1.2 (b) $\begin{cases} xy' + (1+x)y = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1+x}{x} = -\frac{1}{x} - 1$$
$$\ln|y| = \ln|x| - x + C$$
$$y = \lambda e^{-\ln x - x} = \lambda e^{\ln\frac{1}{|x|} - x} = \frac{\lambda}{|x|} e^{-x}, \quad \lambda = \pm e^C$$

On a $y(1) = 1,\ \lambda e^{-1} = 1 \Leftrightarrow \lambda = e$

La solution est :

$$y(x) = \frac{1}{x} e^{1-x}, \quad x \in]0, +\infty[$$

Rq : si on avait $y(-1) = 1$ comme donnée initiale,

$$\lambda = e^{-1}$$

et

$$y(x) = \frac{1}{-x} e^{-1-x}, \quad x \in]-\infty, 0[$$

1.3 (c) $\begin{cases} (1+x^2)y' - xy = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{1+x^2}$$

Soit

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$
$$= \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right) + C$$
$$y = \lambda\sqrt{1+x^2}, \quad \lambda = \pm e^C$$

avec $y(0) = 1$, on a $\lambda = 1$

La solution est

$$y(x) = \sqrt{1+x^2}$$

1.4 (d) $\begin{cases} a(x)y' + b(x)y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

On a

$$\frac{y'}{y} = -\frac{b(x)}{a(x)}$$

Soit

$$\ln|y| = -\int_{x_0}^{x} \frac{b(x)}{a(x)} dt + C$$
$$y = \lambda\, e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{b(x)}{a(x)} dt}$$

avec $y(x_0) = y_0$, on a $\lambda e^0 = y_0$ soit $\lambda = y_0$

La solution est :

$$y(x) = y_0\, e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{b(x)}{a(x)} dt}$$

2 Equations linéaires non-homogènes du 1er ordre

2.1 $(\boldsymbol{a})$ $\begin{cases} \boldsymbol{xy' + y = x} & (\boldsymbol{E}) \\ \boldsymbol{y(2) = 0} \end{cases}$ $(\boldsymbol{S})$

L'équation homogène associée à (E) est

$$xy' + y = 0 \quad (H)$$
$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x}$$

On aura

$$\ln|y| = -\ln|x| + C = \ln\frac{1}{|x|} + C$$
$$y = \lambda\frac{1}{x}$$

La solution générale de (H) est

$$y_H = -\frac{\lambda}{x}, \quad x \in]0, +\infty[$$

On cherche une solution de (E) de la forme

$$y_E = \frac{\lambda(x)}{x}$$
$$(E) \Rightarrow xy_E' + y_E = x$$
$$x\left(\frac{\lambda'}{x} - \frac{\lambda}{x^2}\right) + \frac{\lambda}{x} = x$$
$$\lambda' = x$$

On choisit $\lambda = \frac{1}{2}x^2$

Une solution particulière de (E) est

$$y = y_H + y_E = \frac{\lambda}{x} + \frac{x}{2}$$

avec $y(2) = 0$, on a $\frac{\lambda}{2} + 1 = 0$, soit $\lambda = -2$.

La solution de (S) est donc

$$y(x) = -\frac{2}{x} + \frac{x}{2}, \quad x \in]0, +\infty[$$

2.2 $(\boldsymbol{b})$ $\begin{cases} \boldsymbol{y' + y = xe^{-x}} & (E) \\ \boldsymbol{y(0) = 1} \end{cases}$ (S)

$$y' + y = 0 \quad (H)$$
$$\frac{y'}{y} = -1$$
$$\ln|y| = -x + C$$
$$y = \lambda e^{-x}$$

La solution générale de (H) est

$$y_H = \lambda e^{-x}$$

On cherche une solution de (E) de la forme

$$y_E = \lambda(x)e^{-x}$$
$$y_E' + y_E = xe^{-x}$$
$$\lambda' e^{-x} - \lambda e^{-x} + \lambda e^{-x} = xe^{-x}$$
$$\lambda' = x$$

On choisit $\lambda = \frac{1}{2}x^2$

Une solution particulière de (E) est

$$y_E = \frac{1}{2}xe^{-x}$$

La solution générale de (E) est

$$y = y_H + y_E = \left(\lambda + \frac{1}{2}x^2\right)e^x$$

avec $y(0) = 1$, on a $\lambda = 1$

La solution de (S) est :

$$y(x) = \left(1 + \frac{1}{2}x^2\right)e^{-x}$$

2.3 $(c) = \begin{cases} y' - 2y = -\frac{2}{1+e^{-2x}} & (E) \\ y(0) = 2 \end{cases} \quad (S)$

$$\begin{aligned} y' - 2y &= 0 \quad (H) \\ \frac{y'}{y} &= 2 \\ \ln|y| &= 2x + C \\ y &= \lambda e^{2x}, \ \lambda = \pm e^C \end{aligned}$$

La solution générale de (H) est

$$y_H = \lambda e^{2x}$$

On cherche une solution de (E) de la forme

$$\begin{aligned} y_E &= \lambda(x)e^{2x} \\ y_E' - 2y_E &= -\frac{2}{1+e^{-2x}} \\ \lambda' e^{2x} + 2\lambda e^{2x} - 2\lambda e^{2x} &= -\frac{2}{1+e^{-2x}} \\ \lambda' &= -\frac{2\,e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \end{aligned}$$

On choisit $\lambda = \ln(1 + e^{-2x})$

Une solution particulière de (E) est

$$y_E = \ln(1 + e^{-2x})\,e^{2x}$$

La solution générale de (E) est

$$y = y_H + y_E = (\lambda + \ln(1 + e^{-2x}))e^{2x}$$

avec $y(0) = 2$, on a $\lambda = 2 - \ln 2$

La solution de (S) est :

$$y(x) = (2 - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2x}))e^{2x}$$

2.4 $(d) \quad \begin{cases} xy' - 2y = x^4 & (E) \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad (S)$

$$\begin{aligned} xy' - 2y &= 0 \\ \frac{y'}{y} &= \frac{2}{x} \\ \ln|y| &= 2\ln x + C \\ y &= \lambda x^2, \ \lambda = \pm e^C \end{aligned}$$

La solution générale de (H) est

$$y_H = \lambda x^2$$

On cherche une solution de (E) de la forme

$$\begin{aligned} y_E &= \lambda(x)x^2 \\ xy_E' - 2y_E &= x^4 \\ x(\lambda' x^2 + 2\lambda x) - 2\lambda x^2 &= x^4 \\ \lambda' &= x \end{aligned}$$

On choisit $\lambda = \frac{1}{2}x^2$

Une solution particulière de (E) est

$$y_E = \frac{1}{2}x^4$$

La solution générale de (E) est

$$y = y_H + y_E = \lambda x^2 + \frac{1}{2}x^4$$

avec $y(1) = 1$, on a $\lambda = \frac{1}{2}$

La solution de (S) est :

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^4$$

3 Equations différentielles à variables séparées

3.1 (a) $\begin{cases} 2x + yy' = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 2yy' = -4x \\ &(y^2)' = -4x \\ &y^2 = -2x^2 + C \end{aligned}$$

Avec $y(1) = 1$, on a $1 = -2 + C \Leftrightarrow C = 3$

Donc

$$y = \sqrt{3 - 2x^2} \quad \forall\, x \in \left[-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$$

3.2 (b) $\begin{cases} (4 - x^2)yy' = 2(1 + y^2) \\ y(1) = 0 \end{cases}$

On peut réécrire sous la forme

$$\frac{yy'}{1 + y^2} = \frac{2}{4 - x^2} \Longrightarrow \frac{2yy'}{1 + y^2} = \frac{4}{4 - x^2}$$

On cherche une solution simple de la forme

$$\frac{1}{4 - x^2} = \frac{a}{2 - x} + \frac{b}{2 + x} = \frac{a\,(2 + x) + b\,(2 - x)}{(2 - x)(2 + x)} = \frac{(a - b)x + 2a + 2b}{4 - x^2}$$

Soit

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ 2a + 2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{4}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{2yy'}{1 + y^2} &= \frac{1}{2 - x} + \frac{1}{2 + x} \\ \Rightarrow \ln|1 + y^2| &= -\ln|2 - x| + \ln|2 + x| + C \\ &= \ln\left|\frac{2 + x}{2 - x}\right| = C \\ \Rightarrow 1 + y^2 &= \lambda\left|\frac{2 + x}{2 - x}\right|, \quad \lambda = \pm e^C \\ \Rightarrow y &= \pm\sqrt{\lambda\left|\frac{2 + x}{2 - x}\right| - 1} \end{aligned}$$

Avec $y(1) = 0$ on aura $0 = 3\lambda - 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{3}$

Donc

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{3}\left|\frac{2 + x}{2 - x}\right| - 1}, \quad x \in [1,2[$$

3.3 (c) $\begin{cases} y' = \frac{1-b}{1-2x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow -\frac{y'}{1-y} = -\frac{1}{1-2x}$$
$$\Rightarrow \ln|1-y| = \frac{1}{2}\ln|1-2x| + C$$
$$= \ln\sqrt{|1-2x|} + C \ , \ \ \lambda = \pm e^C$$

Avec $y(0) = 0 \Leftrightarrow 1 = \lambda$

Donc

$$y = 1 - \sqrt{1-2x} \quad \forall\, x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$$

3.4 (d) $\begin{cases} (1+y)y' = 4x^3 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}y^2 = x^4 + C$$

avec $y(0) = 0$ on a $C = 0$, soit

$$y^2 + 2y - 2x^4 = 0$$

On aura

$$\Delta = 4 + 8x^4 > 0$$

Ainsi

$$y = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1+2x^4}}{2} = -1 \pm \sqrt{1+2x^4}$$

Donc

$$y = \sqrt{1+2x^4} - 1, \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

4 Equations linéaires homogènes du 2ème ordre

4.1 $y'' + y = 0$

Equation caractéristique :

$$\lambda^2 + 1 = 0$$
$$\Delta < 0, \qquad \lambda_1 = i, \ \ \lambda_2 = -i$$

Donc

$$y = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$$

4.2 $2y'' + y' - y = 0$

Equation caractéristique :

$$2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$
$$\Delta = 1 + 8 = 9 > 0, \ \ \lambda = -1 \ \text{ et } \frac{1}{2}$$

Donc

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{x}{2}}$$

4.3 $y'' - 4y = 0$

Equation caractéristique :

$$\lambda^4 - 1 = 0$$
$$\Delta > 0 \ \text{ et } \lambda = \pm 2$$

Donc

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$$

4.4 $y'' - 6y' + 9y = 0$

Equation caractéristique :

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$
$$\Delta = 0, \ \ \lambda = -3$$

Donc

$$y = (C_1 + C_2)\, e^{3\lambda}$$

5 Equations linéaires non-homogènes du 2ème ordre

5.1 $y'' + y = x^2 - 1 \quad (E)$

Equation homogène associée :

$$y'' + y = 0 \quad (H)$$

La solution générale de (H) :

$$y_H = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

On cherche une solution particulière de la forme

$$y_E = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{aligned}(E) &\Rightarrow 2a + ax^2 + bx + c = x^2 - 1 \\ &\Rightarrow (a-1)x^2 + bx + (2a + c + 1) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} a - 1 = 0 \\ b = 0 \\ 2a + c + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \end{cases}\end{aligned}$$

Donc une solution particulière de (E) : $y_E = x^2 - 3$

Solution générale de (E) :

$$y = y_H + y_E = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 - 3$$

5.2 $2y'' + y' - y = 3\cos(2x) - \sin(2x) \quad (E)$

Equation homogène :

$$2y'' + y' - y = 0 \quad (H)$$

Solution générale de (H) :

$$y_H = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{x}{2}}$$

On cherche une solution particulière de (E) de la forme

$$y_E = a\sin(2x) + b\sin(2x)$$

$$\begin{aligned}(E) &\Rightarrow -8a\cos(2x) - 8b\sin(2x) - 2a\sin(2x) + 2b\cos(2x) - a\cos(2x) - b\sin(2x) = 3\cos(2x) - \sin(2x) \\ &\Leftrightarrow (9a - 2b + 3)\cos(2x) + (2a + 9b - 1)\sin(2x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 9a - 9b = -3 \\ a + \frac{9}{2}b = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(-2 - \frac{81}{2}\right)b = -3 - \frac{9}{2} = -\frac{15}{2} \\ a = \frac{1}{2} - \frac{9}{2}b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{15}{85} = \frac{3}{17} \\ a = -\frac{5}{17} \end{cases}\end{aligned}$$

Solution particulière de (E) :

$$y_E = -\frac{5}{17}\cos(2x) + \frac{3}{17}\sin(2x)$$

Solution générale de (E) :

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{x}{2}} - \frac{5}{17}\cos(2x) + \frac{3}{17}\sin(2x)$$

5.3 $y'' - 4y = 13\cos(3x) \quad (E)$

Equation homogène :

$$y'' - 4y = 0 \quad (H)$$

Solution générale de (H) :

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$$

On cherche y_E de la forme

$$y_E = a\cos(3x) + b\sin(3x)$$

$$\begin{aligned}(E) &\Rightarrow -9a\cos(3x) - 9b\sin(3x) - 4a\cos(3x) - 4b\sin(3x) = 13\cos(3x) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 13a = -13 \\ 13b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

5.4 $y'' - 6y' + 9y = e^{3x} \quad (E)$

Equation homogène :

$$y'' - 6y' + 9y = 0 \quad (H)$$

Solution générale de (H) :

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{3x}$$

On cherche une solution particulière de (E) de la forme

$$y_E = g(x)\, e^{3x}$$

$$\begin{aligned}(E) &\Rightarrow g'' e^{3x} + 6g' e^{3x} + 9g e^{3x} - 6g' e^{3x} - 18g e^{3x} + 9g e^{3x} = e^{3x} \\ &\Rightarrow g'' = 1\end{aligned}$$

On prend

$$g = \frac{x^2}{2}$$

Solution particulière de (E) :

$$y_E = \frac{x^2}{2} e^{3x}$$

Solution générale de (E) ;

$$y = \left(C_1 + C_2 x + \frac{x^2}{2}\right) e^{3x}$$